Повторяющиеся аукционы с входящими новыми участниками*

Андрей Бремзен†

3 октября 2004

Аннотация

В этой статье изучаются аукционы, проводящиеся в несколько раундов, с возможным входом новых участников между раундами. Для простой модели с двумя раундами, двумя участниками первого раунда и одним потенциальным новым участником показано, что любая симметричная равновесная заявка участников в первом раунде отражает их желание скрыть от нового участника часть информации об их оценках. В целом семействе симметричных равновесий заявки участников первого раунда являются ступенчатыми функциями их оценок. Также в статье обсуждаются расширения этой простой модели, заключающиеся в том, что игроки не уверены наверняка в наличии потенциального нового участника, а также вариант с неограниченным числом участников первого раунда.

*Я благодарен Сергею Измалкову за научное руководство и многочисленные полезные рекомендации, а также Гленну Эллисону, Халуку Эргину, Давиду Макадамсу, Полу Милгрому, участникам семинаров в MIT и РЭШ и Второго Мирового Конгресса Общества Теории Игр за полезные комментарии. Особая благодарность моему научному руководителю Бенгту Холмстрёму за постоянное внимание к работе и неоценимую помощь на этапе написания.

†Российская Экономическая Школа, электронная почта abremzen@nes.ru

1 Введение.

В этой статье изучаются многораундные аукционы с возможным появлением новых участников между раундами. Хотя подобные аукционы достаточно хорошо изучены, в существующей литературе обычно предполагается неизменность состава игроков от одного раунда к другому. Между тем, представляется естественным расширить анализ на случай, в дальнейших раундах могут появляться новые потенциальные покупатели, не участвовавшие в первых раундах. Цель этой статьи — показать, как угроза появления новых игроков изменяет стандартное поведение участников в состоянии равновесия.

Мы рассматриваем Английский аукцион (аукцион с постепенно растущей ценой), повторяющийся дважды, с двумя раундами и тремя игроками, имеющими независимые личные оценки. Для аукциона предлагаются две идентичных единицы товара, в каждом раунде продается одна из них. Спрос каждого из участников ограничен одной единицей товара; победитель первого раунда получает товар и покидает аукцион. В первом раунде участвуют два игрока, при этом третий игрок не может участвовать в первом раунде, но может войти во второй раунд, заплатив некоторую положительную цену за вход. Решение третьего участника основано не только на его оценке предмета но и на результате первого раунда (считается, что третий участник наблюдает цену и победителя). Из-за этой возможности для последующего входа поведение игроков в первом раунде может измениться: решение игрока об прекращении торга в первом раунде аукциона не только означает, что этот игрок не получает товар, продающийся в первом раунде, но и оказывает влияние на поведение третьего игрока, который из анализа результатов первого раунда принимает решение об своем участии либо неучастии. Так как решение третьего игрока зависит от исхода первого раунда, то участники первого раунда будут также учитывать поведение нового игрока при выборе своей цены прекращения торга. В частности, игрок первого раунда может имитировать более высокую оценку товара, чем в действительности, для того, чтобы предотвратить появление нового участника.

Однако, оставаясь в игре слишком долго, игрок первого раунда рискует, что его соперник сам выйдет из игры и тогда ему придется заплатить слишком большую цену. В этой работе мы анализируем, как подобные соображения влияют на поведение игроков.

Насколько нам известно, это первая статья в которой изучается проблема эндогенного входа в контексте многораундных аукционов. Многораундные аукционы с постоянным количеством участников были впервые изучены Ortega-Reichert ([11]). Он разработал двухпериодную модель с двумя игроками и показал, что стратегия каждого игрока может зависеть не только от числа раундов (то есть, от общего предложения товара), но и от информации о поведении конкурента, которая была им получена в предыдущем раунде (а именно, о финальной цене предыдущего раунда). Он рассмотрел аукционы для которых продаваемые предметы имеют одинаковую ценность для всех участников, и в которых каждый игрок корректирует свою оценку ценности товара на основании поведения соперника в первом раунде (дальнейший анализ этой постановки см. в [8]). Milgrom и Weber ([10]) разработали общую модель многораундного аукциона и сравнили как различные процедуры для последовательных аукционов, так и различные информационные структуры, существенные для проведения торга. Ими было установлено, какая информация о ценах в прошлых раундах существенна для остающихся игроков. Важно, что при этом в их моделях все игроки также участвуют начиная с первого раунда.

Другая область исследований, имеющая отношение к вопросам, затрагиваемым в статье, изучает стратегические мотивы торга. Именно, изучается ситуация, в которой поведение участника аукциона важно не только само по себе (как влияющее на шансы выиграть объект), но и приносит определенную дополнительную информацию об оценке игрока его соперникам. Эта идея основана на последовательном устройстве аукциона, традиционные однораундный аукцион не дает возможности для формирования сигналов, которые могут влиять на будущее поведение игроков. Avery ([1]) изучал поведение игроков в Английских аукционах в случае, когда оценки участников коррелированы (и, таким образом, цены заявленные участниками в предыдущих раундах, влияют на поведение их конкурентов). Daniel и Hirshleifer ([5]) построили модель с двумя игроками для аукциона на котором участники предлагают все большие и большие цены и должны платить некоторую сумму за каждое следующее повышение цены; при этом если один из игроков резко повышает цену, то это может служить сигналом того, что его оценка предмета достаточно высока и может спровоцировать более ранний выход оппонента из игры.[1] Опять же, ни в одной из этих работ не рассмотрен случай изменения состава участников.[2]

В этой статье нами будет показано, что наличие потенциального нового конкурента (даже если игроки не уверены в этот присутствии) изменяет поведение игроков. При этом, их равновесные функции торга существенно отличаются от функций торга в обычном последовательном аукционе. Сначала мы продемонстрируем, что в случае, когда цена входа строго положительна, ни в одном равновесии функции торга для первого раунда не являются монотонными по оценке, это означает, что двухпериодный аукцион является, вообще говоря, неэффективным. Затем мы покажем, что для любого уровня цен входа существует равновесие, совершенное к подыграм, в котором функции торга первого раунда являются ступенчатыми, при этом при уменьшении входной цены количество ступеней будет увеличиваться. Это будет отражать желания участников первого раунда скрыть информацию о своих оценках.

Статья организована следующим образом. Параграф 2 описывает модель и показывает, что все симметричные равновесные функции торга для первого раунда отражают желание игроков предоставить новому игроку неверную информацию об их оценках. Параграф 3 изучает случай высокой входной цены и ступенчатых

[1] См. также Fishman ([6]).

[2] Отметим, что есть работы в которых предполагается, что участник должен заплатить некоторую цену за изменение цены и решения о входе являются эндогенными. Это предположение является достаточно разумным, например оно с той или иной степенью выполняется в тендерах на поставку товаров или услуг для государственных или муниципальных нужд. Такие работы также имеют отношение к рассматриваемой нами модели, однако в каждой из них рассматриваются только однопериодные аукционы. Примеры подобных работ: Gal, Landsberger ; Nemirovski ([7]) ; Landsberger ; Tsirelson ([9]).

функций торга для этого случая. В параграфе 4 проводится конструкция равновесия, в котором функции торга для первого раунда являются ступенчатыми. В параграфе 5 рассматриваются расширения модели с экзогенными ограничениями на вход, параграф 6 описывает равновесие в случае, когда число участников первого раунда больше двух. В параграфе 7 обсуждается случай нескольких потенциально входящих игроков. Наконец, в параграфе 8 рассмотрены основные выводы работы.

2 Модель.

Рассмотрим модель, в рамках которой мы будем решать задачу. Считается, что в продаже на аукционе разыгрываются права на владение двумя идентичных предмета, торг производится последовательным поднятием цены. Два раунда аукциона проводятся один за другим и исход первого аукциона(окончательная цена и победитель) известен всем до начала второго раунда. В каждом раунде в случае ничьей(окончательная цена, предложенная игроками первого раунда одинакова) предмет распределяется между участвующими игроками с равной вероятностью.

Рассматривается случай трех игроков, нейтральных к риску, никто из игроков не хочет получить больше одного предмета. В первом раунде участвуют только игроки 1 и 2, победитель получает один из предметов и покидает аукцион, проигравший продолжает участие во втором раунде. Анализируя исход первого аукциона, третий игрок принимает решение об участии во втором раунде. Если он принимает участие в торгах, то он платит некоторую цену за вход $c > 0$ и торги происходят между ним и оставшимся с первого раунда участником. В случае, когда он решает не принимать участие в торгах, предмет достается оставшемуся игроку бесплатно. [3]. Оценки игроков о цене предмета известны только им, они одинаково и независимо

[3] Согласно этой постановке, по сути, игроки ведут себя несимметрично, так как для участия в аукционе новый игрок вынужден заплатить некоторую сумму, в то время, как его конкуренты участвуют в игре бесплатно. Альтернативная формулировка в которой все игроки платят цену за вход приводит практически к аналогичным результатам.

распределены на отрезке $[0,1]$. Функция распределения $F(x)$ считается дважды непрерывно дифференцируемой по x, ее плотность распределения при этом равна $f(x)$, при этом $f(x) > 0$ for $x > 0$. Наконец, предположим строго возрастающую hazard rate $h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$, такую, что существует константа $m > 0$ такая, что $h'(x) > m$ для любого $x \in [0,1]$.

Мы ищем for a subgame perfect Bayesian симметричное равновесие в слабо недоминируемых стратегиях для такой игры. Такое равновесие состоит из:

- Стратегии при какой цене $b(v)$ игрокам первого раунда(в дальнейшем - игрокам 1 и 2)следует отказаться от участия;
- Мнения игрока 3 о типе его будущего соперника(напомним, что игроку 3 известен исход первого раунда).
- Решения игрока 3 об участии (функция от исхода первого раунда и оценки игрока);
- Симметричные стратегии торга игрока 3 и его соперника во втором раунде.[4]

Как и обычно, мнение игрока 3 должно соответствовать начальному распределению и стратегиям, согласно которым играют игроки 1 и 2 в первом раунде и его решение об участии должно быть сообразным этому мнению.

Легко понять, что если игрок 3 решает участвовать во втором раунде, то единственная пара слабо недоминируемых стратегий для игроков во втором раунде - торговаться до цен равных их оценкам ценности предмета. Поэтому для решения задачи необходимо описать поведение игроков в первом раунде и решение об участии игрока 3.

[4]Так как игра является симметричной по отношению к игрокам 1 и 2, то мы рассматриваем симметричное равновесие.

2.1 Случай бесплатного участия.

Предположим, что вход бесплатен для третьего участника, то есть, $c = 0$. Проанализируем $b(v)$ – равновесную стратегию каждого из игроков в первом раунде как функцию от оценки.

В этом случае единственная слабо недоминируемая стратегия для игрока 3 - всегда участвовать во втором раунде, и прекращать торг при условии достижения уровня цены его оценки предмета; поэтому его стратегия является тривиальной и проблема сводится к задаче двух игроков, которая имеет решение в слабо доминируемых стратегиях.

Игрок с оценкой v откажется от торгов в первом раунде при цене $b(v)$, при которой ему все равно: выиграть и получить $v - b(v)$, или отказаться от игры, с условием того, что он еще может выиграть предмет во втором раунде. Однако:

$$\int\limits_0^v [v-x]f(x)dx = \int\limits_0^v F(x)dx$$

.

Поэтому,доминирующая стратегия каждого игрока в первом раунде - отказаться от игры при $b(v) = v - \int\limits_0^v F(x)dx$.

Эта функция строго монотонна по оценке v, поэтому игрок 3 сможет получить оценку своего оппонента. Если эта оценка будет больше, чем его собственная ему будет все равно, участвовать или нет, так как победить он все равно не может. Решение не участвовать представляет собой слабо доминируемую стратегию поэтому исключается. Однако в случае положительной цены участия $c > 0$, при оценке больше его собственной вход для него не имеет смысла, поэтому и участвовать он не будет. Поэтому вышеприведенный анализ не применим к случаю, когда $c > 0$.

2.2 Плата за вход: an impossibility result.

Lemma 1 *Для любого положительного уровня цены участия не существует (subgame perfect) симметричной равновесной функции торга $b(v)$ являющейся строго* *монотонной по оценке.*

Доказательство: Предположим обратное; допустим, что $b(v)$ - строго монотонная стратегия игроков 1 и 2 в первом раунде. Тогда игрок 3 сможет правильно определить оценку v его оппонента из цены первого раунда, поэтому он будет участвовать тогда и только тогда, когда его собственная оценка равна по крайней мере $v + c$.

Рассмотрим поведение игрока 1 в первом раунде; предположим его оценка $v > 1-c$. Следующее отклонение от стратегии $b(v)$ которое может рассматриваться игроком 1 - это сыграть $b(\tilde{v})$ для некоторого $\tilde{v}$, то есть притвориться, что его тип $\tilde{v}$; рассмотрим при этом небольшие отклонения, такие, что $\tilde{v} > 1 - c$. Такие отклонения дадут ему выигрыш:

$$W(v, \tilde{v}) = \int\limits_0^{\tilde{v}} (v - b(x)) f(x) dx + v(1 - F(\tilde{v})).$$

Первый член этого уравнения это ожидаемый выигрыш игрока 1 в первом раунде при условии, что игрок 2 торгуется до $b(v)$. Игрок 1 проигрывает в первом раунде если игрок 2 имеет оценку выше, чем $\tilde{v}$, это происходит с вероятностью $1 - F(\tilde{v})$; в этом случае игрок 3 считает, что игрок 1 имеет оценку $\tilde{v}$ и не участвует во втором раунде так как его собственная оценка меньше $\tilde{v} + c > 1$; игрок 2 получает предмет бесплатно. Причем так как $b(v)$ строго монотонная, $W(v, \tilde{v})$ является абсолютно(???) непрерывной по $\tilde{v}$ и имеет левые и правые производные по $\tilde{v}$ в любой точке.

Если $b(v)$ - равновесная функция торга, тогда для любого v функция $W(v, \tilde{v})$ должна достигать своего максимума по $\tilde{v}$ при $\tilde{v} = v$. Условие первого порядка для этого сводится к неотрицательности левой производной при $\tilde{v} = v$. Таким образом

$$0 = \frac{d}{d\tilde{v}} W(v, \tilde{v}) \bigg|_{\tilde{v} = v - 0} = (v - b(v) - v) f(v) = -b(v) f(v). \tag{1}$$

Понятно, что это невозможно, так как $f(v) > 0$ и $b(v)$ предположена монотонной (и поэтому не может быть равной тождественно нулю). ЧТД.

Примечание. Аналог леммы 1 справедлив даже при случае когда новых участников(или игроков первого раунда) больше чем 2. Разделяющего равновесия, то есть равновесия при котором потенциальный игрок наблюдая за игрой может получить точные оценки предметов начальными участниками по результатам первого раунда при этом не существует. В самом деле, если такое равновесие существует для случая большого количества игроков первого раунда, тогда все они, кроме двух, имеют нулевые оценки предмета, при этом два игрока будут поставлены в условия аналогичные условиям леммы 1, при этом аналогичные построения указывают на невозможность разделяющего равновесия.

3 Ступенчатые функции как равновесные функции торга.

Сейчас мы перейдем к анализу симметричных равновесных стратегий $b(v)$ для игроков в первом раунде.

Рассмотрим сначала случай очень большой входной цены, $c \geq 1 - Ev$. Предположим, что и игрок 1, и игрок 2 отказываются от торга в первом раунде сразу же при цене 0, вне зависимости от их начальной оценки: $b^{(0)}(v) \equiv 0$. Игрок 3 всегда наблюдает нулевую цену но не может получить никакой информации об оценке оппонента, он по-прежнему считает, что она распределена на отрезке $[0, 1]$ с функцией распределения $F(v)$. Даже если игрок 3 имеет самую максимальную возможную оценку (равную 1), его средний выигрыш при вступлении в игру будет равным всего лишь $1 - Ev$, что недостаточно для покрытия цены за участие, поэтому он не будет даже участвовать. Поэтому для $c \geq 1 - Ev$ торг начальных игроков $b^{(0)}(v)$ и невхождение в игру третьего участника является равновесием.

Если входные цены не столь высоки ($c < 1 - Ev$), тогда игра по стратегии $b^{(0)}(v) \equiv 0$ более не является равновесием: каждый из первых двух игроков с какой-то положительной вероятностью ожидает вход третьего, при этом они считают для себя более выгодным получить предмет в первом раунде.

Вместо $b^{(0)}(v)$, рассмотрим $b^{(1)}(v)$ для некоторого $v_1 < c$:

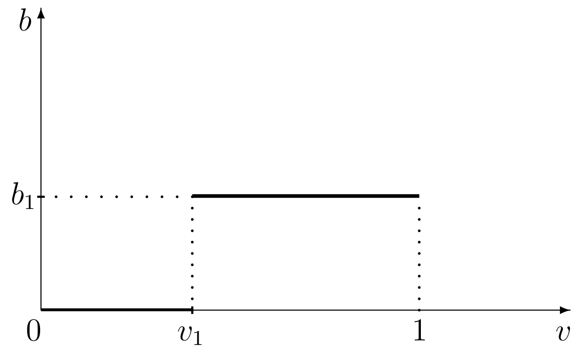

Рис. 1: Равновесная ступенчатая функция торга. $b^{(}1)(v)$.

$$b^{(1)}(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leq v \leq v_1, \\ b_1, & v_1 < v \leq 1. \end{cases}$$

Чтобы закончить описание предлагаемых равновесных стратегий, необходимо описать решение о входе игрока 3 на основании цены p, которую он наблюдает в первом раунде. Его решение о входе задается следующими неравенствами:

- если $p \geq b_1$, не участвовать ;
- если $p = 0$, участвовать если $v > \bar{v} = c + v_1 - \int\limits_0^{v_1} \frac{F(x)}{F(v_1)} dx$;
- если $0 < p < b_1$, участвовать если $v \geq c$.

Последний пункт указывает на (???)The last provision implies specification of player 3's beliefs off the equilibrium path: он считает, что игрок, торгующийся при ценах выше нуля но ниже b_1 имеет оценку, равную нулю.[5]

Proposition 1 *Предлагаемая стратегия для входа является наилучшим ответом третьего игрока на стратегию $b_1(v)$, до тех пор, пока $v_1 \leq c$ и $E(v|v \geq v_1) \geq 1 - c$.*

Доказательство: Если третий игрок уверен, что оба участника первого раунда придерживаются стратегии $b^{(1)}(v)$, он придет к выводу, зная результат первого раунда $p = 0$, что проигравший в первом раунде игрок имеет оценку меньшую или равную,

[5] Подобная спецификация находится в соответствии с интуитивным критерием Cho-Kreps [3].

чем v_1. Это дает ему условную плотность распределения вероятности равную $f(x|x < v_1) = \frac{f(x)}{F(v_1)}$ на отрезке $[0, v_1]$ и равную нулю во всех других точках. Игрок 3 будет считать для себя вход выгодным тогда и только тогда, когда его собственная оценка v будет равной по крайней мере c, что немедленно означает, что он выиграет с вероятностью 1 во втором раунде , так как $v_1 \leq c$. Теперь предположим, что игрок 3 все-таки участвует и при этом его оценка $v \geq v_1$. Его ожидаемый выигрыш при этом равен:

$$\int_0^{v_1} [v - x] \frac{f(x)}{F(v_1)} dx = v - v_1 + \int_0^{v_1} \frac{F(x)}{F(v_1)} dx.$$

Но условие его участия - равенство(превышение) его ожидаемого выигрыша над c, что и является рассматриваемым нами случаем, когда $v \geq \bar{v}$.

Теперь предположим, что игрок 3 наблюдает результат первого раунда $p = b_1$. Его вывод при этом заключается в том, что оценка его соперника выше, чем v_1 с условной вероятностью, равной $f(x) = \frac{1}{1-F(v_1)}$ на отрезке $[v_1, 1]$ и нулю во всех других точках. Даже если его собственная оценка равна единице, его ожидаемый выигрыш равен всего

$$\int_{v_1}^{1} [1 - x] \frac{f(x)}{1 - F(v_1)} dx = 1 - E(v|v \geq v_1),$$

что по нашему предположению не является достаточным для того, чтобы покрыть цену c, заплаченную им за вход, поэтому участвовать он не будет. ЧТД.

Рассмотрим цену b_1, для того, чтобы игроку с оценкой v_1 было все равно - предложить нулевую цену, либо предложить b_1. Предположим, что игрок 1 ведет себя так, что его окончательная цена выражается как $b^{(1)}(v)$ и рассмотрим игрока 2 оценивающего предмет как $v > \bar{v}$. Когда игрок 2 торгуется до нулевой цены, с вероятностью $F(v_1)$ игрок 1 будет также торговаться до нулевой цены и при этом игрок 2 получит предмет бесплатно с вероятностью $\frac{1}{2}$. Также при этом предмет может получить бесплатно и игрок 1, при этом с вероятностью $\frac{1}{2}$ (или наверняка, если у игрока 1 оценка предмета $v > v_1$) игрок 2 принимает участие во втором раунде в котором игрок 3, ценность предмета для которого $\bar{v}$ либо ниже, не участвует. Игрок 2 при этом получает предмет бесплатно. Рассмотрим теперь случай, когда игрок 3 с оценкой выше $\bar{v}$ принимает участие во втором раунде и выигрывает из-за сделанного нами предположения, что $v \leq \bar{v}$. Выигрыш от торговли с результирующей ценой равной нулю для игрока 2 с оценкой предмета свыше $\bar{v}$ достаточно легко считается и равен

$$\pi_0(v) = \begin{cases} \frac{F(v_1)}{2}v + \left(1 - \frac{F(v_1)}{2}\right)\bar{v}v, & v \leq \bar{v}, \\ \frac{F(v_1)}{2}v + \left(1 - \frac{F(v_1)}{2}\right)\left(\bar{v}F(\bar{v}) + \int\limits_{\bar{v}}^{v} F(x)dx\right), & v \geq \bar{v}. \end{cases}$$

Если вместо этого он торгуется до b_1, его выигрыш равен:

$$\pi_{b_1}(v) = F(v_1)v + \frac{1 - F(v_1)}{2}(v - b_1) + \frac{1 - F(v_1)}{2}v.$$

Приравнивая $\pi_{b_1}(v_1)$ к $\pi_0(v_1)$ можно определить b_1.

(???slope везде расценивалась как производная)

Заметим также, что производная по v функции $\pi_0(v)$ всегда ниже, чем производная $\pi_{b_1}(v)$. Это свойство вместе с тем, что равенство $\pi_{b_1}(v_1) = \pi_0(v_1)$ означает, что игрок первого раунда предпочтет назвать цену, равную нулю в случае если его оценка меньше, чем v_1; он назовет цену, равную b_1 если его оценка будет больше, чем v_1.

Чтобы окончательно закончить с описанием $b(v)$ необходимо указать значение v_1. Это можно сделать, рассмотрев отклонение от $b(v)$ (а именно, торг до цены, большей нуля, но меньшей b_1) которое не должно быть лучше для любой оценки v.

Если игрок 2 (с оценкой v) торгуется до цены, большей нуля но меньшей b_1, то, с вероятностью $F(v_1)$ игрок 1 будет торговаться до нулевой цены и игрок 2 получит предмет бесплатно; однако при этом с вероятностью $1 - F(v_1)$ такой ситуации не произойдет и игрок 1 будет торговаться не до нуля, а до b_1. Последствия этого случая будут заключаться в том, что игрок 2 проиграет в первом раунде, при этом также игрок 3 будет уверен, что оценка игрока 2 равна нулю, поэтому он примет участие во втором раунде аукциона при его собственной оценке выше, чем c. Однако, если оценка v ниже c, он в среднем получит выигрыш $F(c)v$ во втором раунде, а если же его оценка выше c, его средний выигрыш будет равняться:

$$F(c)v + \int\limits_{c}^{v} [v - x]f(x)dx = F(c)c + \int\limits_{c}^{v} F(x)dx.$$

Обобщая приведенные выше случаи, получаем:

$$\pi_{<b_1}(v) = \begin{cases} F(v_1)v + (1 - F(v_1))F(c)v, & v \le c \\ F(v_1)v + (1 - F(v_1))\left(F(c)c + \int\limits_c^v F(x)dx\right), & v \ge c. \end{cases}$$

Заметим, что сама окончательная цена не влияет на результат(при условии, что она больше нуля но меньше b_1).[6]

Proposition 2 $\left.\frac{\partial \bar{v}}{\partial v_1}\right|_{v_1=0} = \frac{1}{2}$.

Доказательство: Непосредственно следует из всего вышесказанного.

Proposition 3 *Производная* $\pi_{<b_1}(v)$ *меньше, чем производная* $\pi_0(v)$ *at* $v = 0$ *для достаточно малых* v_1.

Доказательство: И $\pi_0(v)$ и $\pi_{<b_1}(v)$ являются линейными по $v = 0$ для $v < c$. Их производные равны:

$$\pi_0' = \frac{F(v_1)}{2} + \left(1 - \frac{F(v_1)}{2}\right) F(\bar{v}),$$

и

$$\pi_{<b_1}' = F(v_1) + (1 - F(v_1))F(c).$$

Обе этих производных стремятся к $F(c)$ при $v_1 \to 0$. Поэтому необходимо показать, что:

$$\left.\frac{d\pi_0'}{dv_1}\right|_{v_1=0} > \left.\frac{d\pi_{<b_1}'}{dv_1}\right|_{v_1=0} \tag{2}$$

Из предложения 2 неравенство (2) эквивалентно:

$$\frac{f(0)}{2} - \frac{f(0)}{2}F(c) + \frac{f(c)}{2} > f(0) - f(0)F(c),$$

что немедленно следует из $h(0) < h(c)$, ЧТД.

[6] Также следует отметить, что $\pi_{b^{(1)}(v)}(v) - \pi_{<b_1}(v)$ достигает максимума при $v = 0$, поэтому игрок с оценкой, равной нулю теряет меньше отклоняясь от стратегии $b^{(1)}(v)$. Это и есть нужное нам объяснение того, что третий игрок, наблюдающий у одного из игроков первого раунда отклонение от $b^{(1)}$ считает, что у этого игрока оценка, равная нулю.

Рассмотрим v_1 такую, что предложение 3 верно. Торговля до цены выше нуля (и ниже b_1) не является выгодным отклонением для $v < v_1 < c$. Также подобное отклонение не является выгодным для случая $v > v*$, это получается из того, что $\pi_{b_1}(v_1) = \pi_0(v_1) > \pi_{<b_1}(v_1)$ и поэтому:

$$\pi'_{b_1}(v) = 1 > F(v_1) + (1 - F(v_1))F(v) = \pi'_{<b_1}(v),$$

- торг ниже b_1 для $v > v_1$ всегда хуже торга до цены b_1.

Наконец, необходимо показать, что торговля свыше цены b_1 также не является выгодным отклонением. Это непосредственно следует из следующего рассуждения: и торг в точности до(окончательной) b_1 и торг до цены выше b_1 приводят к тому, что игрок получает предмет с вероятностью 1, либо в первом, либо во втором раунде(так как при этом условии игрок 3 не будет участвовать во втором раунде). Однако, если участник объявляет цену выше b_1, он обязан будет заплатить b_1 всякий раз когда вне зависимости от того, превышает ли оценка его оппонента v_1, в то же время если он объявит цену b_1, он будет вынужден заплатить b_1 в половине таких случаев. Поэтому решение объявить цену b_1 является лучшим по сравнению с решением объявить цену, большую b_1. Заметим также, что при этом, так как оба игрока объявляют b_1 и победитель, который определяется жребием, будет должен заплатить объявленную цену, то каждый из игроков предпочтет *проиграть* в первом раунде.

Поэтому, до тех пор, пока существует $v_1 < c$, достаточно малая для выполнения предложения 3, но достаточно большая для выполнения $1 - E(v|v \geq v_1) < c$, существует равновесие, в котором функции торга являются ступенчатыми с одной ступенью, для существования такого равновесия важно то, что c является достаточно большим. Заметим также, что точка v_1 не является однозначно определенной в постановке задачи, поэтому равновесие со ступенчатыми функциями торга не является однозначно определенным; скорее существует целое семейство таких равновесий, для которых в качестве определяющего параметра выступает v_1.

В следующей главе мы построим равновесие со ступенчатыми функциями торга для любого положительного c, а эту главу закончим примером для иллюстрации изложенных принципов.

Пример. Рассмотрим равномерное распределение оценок: $F(x) = x$ для $x \in [0,1]$. Пусть $c = \frac{1}{3}$ и рассмотрим $v_1 = c = \frac{1}{3}$. Тогда $\pi_{b_1}(v) = v - \frac{1}{3}b_1$ и $\pi_0(v) = \frac{1}{6}v + (1-\frac{1}{6})\frac{1}{2}v$, откуда $b_1 = \frac{5}{12}$. Выигрыш от отклонения

$$\pi_{<b_1}(v) = \begin{cases} \frac{5}{9}v, & v \le \frac{1}{3} \\ \frac{1}{27} + \frac{1}{3}v + \frac{1}{3}v^2, & v \ge \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Отсюда легко видно, что $\pi_{<b_1}(v) < \pi_{b_1}(v)$ как при $v = 1$ так и при $v = \frac{1}{3}$, и, следовательно,

$$b(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \le \frac{1}{3}, \\ \frac{5}{12}, & \frac{1}{3} < v \le 1, \end{cases}$$

является симметричным равновесием для $c = \frac{1}{3}$.

4 Равновесие с небольшими ценами входа.

В этой главе мы закончим описание равновесного решения, показав, что для любой положительной цены за вход $c > 0$ существует ступенчатая функция, являющаяся равновесной функцией торга для первого раунда. В частности мы продемонстрируем механизм спецификации точек $0 = v_0 < v_1 < \cdots < v_{n+1} = 1$ и значений $0 = b_0 < b_1 < \cdots < b_n$ таковых, что функция:

$$b^{(n)}(v) = \begin{cases} b_k, \quad v_k \le v < v_{k+1}, \qquad k = 0, \dots, n \end{cases}$$

является равновесной функцией торга для первого раунда. Мы будем искать точки v_k для которых $v_{k+1} - v_k \le c$.

Мы считаем, что игрок 3 ведет себя следующим образом: если он наблюдает окончательную цену первого раунда в интервале от b_i до b_{i+1},то он считает, что оценка его соперника v_i и принимает участие в игре при оценке выше $v_i + c$.

Предположим, что у игрока 1 оценка равна v и игрок 2 ведет себя согласно приведенной выше стратегии. Игрок 1 может выбирать между следующими

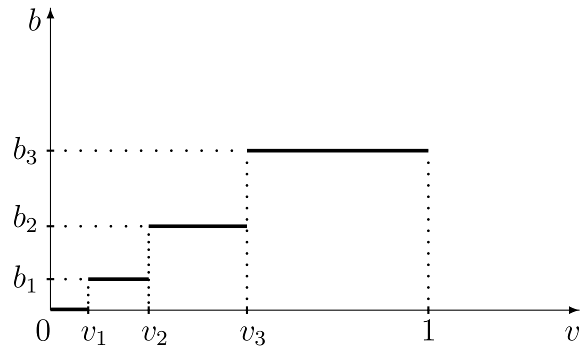

Рис. 2: Равновесная ступенчатая функция торга $b^(3)(v)$.

вариантами поведения: торговаться до цены b_k, или торговаться до цены выше b_k но ниже b_{k+1} (Мы будем использовать сокращение $< b_{k+1}$ для обозначения последней стратегии). Ожидаемый выигрыш игрока 1 от подобной стратегии равен:

$$\pi_{b_k}(v) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - b_i) + \frac{F(v_{k+1})-F(v_k)}{2}(v - b_k) + \left(1 - \frac{F(v_{k+1})+F(v_k)}{2}\right) F(\bar{v}_k)v, & v \le \bar{v}_k, \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}(F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - b_i) + \frac{F(v_{k+1})-F(v_k)}{2}(v - b_k) + \left(1 - \frac{F(v_{k+1})+F(v_k)}{2}\right) \left(F(\bar{v}_k)\bar{v}_k + \int\limits_{\bar{v}_k}^{v} F(x)dx\right) & v > \bar{v}_k \end{cases}$$

и

$$\pi_{<b_{k+1}}(v) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k-1}(F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - b_i) + (F(v_{k+1}) - F(v_k))(v - b_k) + (1 - F(v_{k+1}))F(v_k + c)v, & v \le v_k + c, \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1}(F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - b_i) + (F(v_{k+1}) - F(v_k))(v - b_k) + (1 - F(v_{k+1}))\left(F(v_k + c)(v_k + c) + \int\limits_{v_k+c}^{v} F(x)dx\right) & v > v_k + c \end{cases}$$

где

$$\bar{v}_k = c + E[x|v_k < x < v_{k+1}] = c + \frac{1}{F(v_{k+1}) - F(v_k)} \int\limits_{v_k}^{v_{k+1}} xf(x)dx \tag{3}$$

представляет собой минимальную оценку игрока 3 при которой он примет участие в торге. Эта оценка обусловлена той ценой b_k, которую он наблюдает в первом раунде. Заметим, что в равновесии если игрок 3 принимает участие во втором раунде он побеждает в нем с вероятностью 1, это следует из предположения, что $v_{k+1} - v_k \le c$.

Чтобы $b^{(n)}(v)$ представляла собой симметричное равновесие, необходимо убедиться, что для любого игрока первого раунда оптимальным решением является играть по стратегии $b^{(n)}(v)$ в случае, когда он ожидает от другого игрока первого раунда тоже игры по этой стратегии. Построим механизм выбора v_k и b_k, сделаем это следующим образом: выберем v_1, v_2 ... v_n; затем выберем b_k, $k = 1, \ldots, n$.

Предположим, что для всех $i = 0, \ldots, k$ точки v_i выбраны таким способом, что объявление цены b_i при оценке $v \in [v_i, v_{i+1}]$ является лучшим шагом для игрока, чем объявление цены b_j для $j \neq i$ и объявление цены между b_0 и b_1, между b_1 и b_2 ... между b_{k-1} и b_k при $j = i$(???).

Если $1 - E[x|v_{k-1} < x \leq v_k] \geq c$, точки находить не надо, просто возьмем $n = k$. Очевидно, торг до цены выше b_k хуже чем торг до цены в точности равной b_k: для обоих стратегий игрок получает предмет с вероятностью 1 (игрок 3 при этом не принимает участие во втором раунде), но для первой стратегии средняя цена, заплаченная участником, выше.

Если $1 - E[x|v_{k-1} < x \leq v_k] < c$ выберем $v_{k+1} > v_k$ таким образом, что объявление цены b_k является более выгодным шагом для игрока, чем объявление цены немного выше, чем b_k для $v \in [v_k, v_{k+1}]$.

Чтобы показать, что такой выбор v_{k+1} всегда возможен, заметим, что при $v_{k+1} \to v_k$ и $v \in [v_k, v_{k+1}]$ и $\pi_{b_k}(v)$ и $\pi_{<b_{k+1}}(v)$ имеют один и тот же предел. Также заметим, что для $v \in [v_k, v_{k+1}]$ и $\pi_{b_k}(v)$ и $\pi_{<b_{k+1}}(v)$ являются линейными по v. Поэтому для завершения доказательства достаточно показать что для достаточно малых разностей $v_{k+1} - v_k$ два неравенства выполнены: $\pi_{b_k}(v_k) > \pi_{<b_{k+1}}(v_k)$ и $\pi'_{b_k}(v_k) > \pi'_{<b_{k+1}}(v_k)$. Это следует из нескольких, изложенных ниже, предложений.

Proposition 4 $\left.\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial v_{k+1}}\right|_{v_{k+1}=v_k} = \frac{1}{2}$.

Доказательство: Непосредственно следует из всего вышесказанного.

Proposition 5 *Если $k > 0$, то $\pi_{b_k}(v_k) > \pi_{<b_{k+1}}(v_k)$ для v_{k+1} достаточно близкого к v_k.*

Доказательство: Заметим, что

$$\pi_{b_k}(v_k) - \pi_{<b_{k+1}}(v_k) = -\frac{F(v_{k+1}) - F(v_k)}{2}(v_k - b_k) + \left(1 - \frac{F(v_{k+1}) + F(v_k)}{2}\right) F(\bar{v}_k)v_k - (1 - F(v_{k+1}))F(v_k + c)v_k.$$

Это выражение равняется нулю при $v_{k+1} = v_k$. А значит, для того, чтобы доказать что оно является положительным при v_{k+1} достаточно близком к v_k надо показать, что его производная по v_{k+1} положительна при условии $v_{k+1} = v_k$. Из предложения 4 эта производная равна

$$\frac{\partial}{\partial v_{k+1}} \left(\pi_{b_k}(v_k) - \pi_{<b_{k+1}}(v_k) \right) \Big|_{v_{k+1}=v_k} = -\frac{f(v_k)}{2}(v_k - b_k) + (1 - F(v_k))v_k \frac{f(v_k + c)}{2} - \frac{f(v_k}{2} F(v_k + c)v_k + f(v_k)F(v_k + c)v_k \geq$$

$$\frac{v_k}{2} \left[-f(v_k) + (1 - F(v_k))f(v_k + c) + F(v_k + c)f(v_k) \right] = \frac{v_k(1 - F(v_k))(1 - F(v_k + c))}{2} [h(v_k + c) - h(v_k)] > 0,$$

ЧТД.

Proposition 6 *Производная $\pi_{b_k}(v)$ по v выше, чем производная $\pi_{<b_{k+1}}(v_k)$ при $v = v_k$ для v_{k+1} достаточно близкого к v_k.*

Доказательство: аналогично доказательству предложения 3 и поэтому не приводится. Как и в доказательстве предложения 5, ключевое предположение состоит в том, что hazard rate $h(x)$ возрастает при увеличении x.

Поэтому, всегда возможно выбрать v_{k+1} таким образом, что торг до цены выше b_k - худшее решение, чем торг до b_k для $v \in [v_k; v_{k+1}]$. Более того, в следующем предложении мы покажем, что итеративный процесс с помощью которого мы строим v_1, v_2 ... v_n и b_k, $k = 1, \ldots, n$ остановится после конечного числа шагов:

Proposition 7 *Если существует $a > 0$ такая, что $h'(x) > a$ для всех $x \in [0, 1]$ и $F(x)$ дважды непрерывно дифференцируема то для всех $c > 0$ существует $\varepsilon > 0$ для которой v_k может быть выбран таким образом, что $v_{k+1} - v_k > \varepsilon$.*

Доказательство: аналогично доказательству предложений 5 и 6 и, поэтому, опущено.

Как только точки v_k выбраны, равновесные цены b_k могут быть определены с помощью соотношения $\pi_{b_{k+1}}(v_{k+1}) = \pi_{b_k}(v_{k+1})$. Это равенство, вместе с тем фактом, что производная $\pi_{b_{k+1}}(v)$ по v больше, чем производная $\pi_{b_k}(v)$ доказывает, что объявление b_k - более выгодный шаг, чем объявление b_{k+1} при $v < v_{k+1}$ и объявление b_{k+1} - более выгодный шаг, чем объявление b_k при $v > v_{k+1}$; в частности это означает, что $b_{k+1} > b_k$. Наконец заметим, что производная $\pi_{<b_{k+1}}(v)$ по v меньше, чем производная $\pi_{b_{k+1}}(v)$ для $v > v_{k+1}$ и больше, чем $\pi_{b_k}(v)$ для $v < v_{k+1}$. Поэтому, так как $\pi_{<b_{k+1}}(v_{k+1}) < \pi_{b_k}(v_{k+1}) = \pi_{b_{k+1}}(v_{k+1})$, отклонения от $b^{(n)}(v)$ никогда не являются оптимальными. Построение проведено.

5 Случай возможного отсутствия третьего игрока.

В этой главе мы распространим анализ на случай, когда мы не можем ничего сказать наверняка об существовании третьего игрока. Введем вероятность q с которой игрок 3 существует(если он существует, он может, если найдет выгодным для себя, принять участие во втором раунде). Соответственно, с вероятностью $1-q$ во втором раунде будет только один игрок вне зависимости от стратегии игроков в первом раунде.

С помощью следующей леммы можно установить тип равновесия, который будет в этой игре.

Lemma 2 *Рассмотрим ступенчатую функцию*

$$b_n(v) = \begin{cases} b_k, \quad v_k \leq v < v_{k+1}, \qquad k = 0, \dots, n \end{cases}$$

которая является равновесной ступенчатой функцией для случая $p = 1$ (то есть для случая, когда игрок 3 присутствует наверняка). Тогда функция

$$b_n^p(v) = \begin{cases} p \cdot b_k, \quad v_k \leq v < v_{k+1}, \qquad k = 0, \dots, n \end{cases}$$

является равновесной функцией торга для любого $p \in [0, 1]$.

Доказательство: Мы так же, как и раньше можем найти, сколько получит игрок как для равновесного торга $b^{(n)}(q, v)$, так и для любого отклонения от этого равновесного торга. Единственное изменение, которое произойдет по сравнению с рассмотренным случаем $q = 1$ - ожидаемый выигрыш во втором раунде, являющийся теперь некоторым усреднением случая $q = 1$ и случая, когда участник 3 совсем не принимает участия в аукционе.Роль весового коэффициента усреднения при этом играет q. Тогда:

$$\pi_{q \cdot b_k}(v) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k-1} (F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - qb_i) + \dfrac{F(v_{k+1}) - F(v_k)}{2}(v - qb_k) \\ \qquad + \left(1 - \dfrac{F(v_{k+1}) + F(v_k)}{2}\right)((1-q)v + qvF(\bar{v_k})), & v \leq \bar{v}_k, \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} (F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - qb_i) + \dfrac{F(v_{k+1}) - F(v_k)}{2}(v - qb_k) \\ \qquad + \left(1 - \dfrac{F(v_{k+1}) + F(v_k)}{2}\right)\left((1-q)v + q\left(\bar{v_k}F(\bar{v_k}) + \int\limits_{\bar{v}_k}^{v} F(x)dx\right)\right) & v < \bar{v}_k, \end{cases}$$

и

$$\pi_{<q\cdot b_{k+1}}(v) = \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{k-1} (F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - qb_i) + (F(v_{k+1}) - F(v_k))(v - qb_k) \\ \qquad\qquad + (1 - F(v_{k+1}))\left((1-q) + qvc\right), & v \le v_k + c, \\ \sum\limits_{i=0}^{k-1} (F(v_{i+1}) - F(v_i))(v - qb_i) + (F(v_{k+1}) - F(v_k))(v - qb_k) \\ \qquad\qquad + (1 - F(v_{k+1}))\left((1-q) + q\left(v_k + c)F(v_k + c) + \int\limits_{v_k+c}^{v} F(x)dx\right)\right), & v > v_k + c. \end{cases}$$

Можно легко увидеть, что все результаты, полученные для случая $q = 1$, легко переносятся и на этот случай. ЧТД.

Из леммы 2 следует, что даже если третий игрок присутствует не наверняка в равновесии функции торга являются ступенчатыми. Более того, существует ясная взаимосвязь между этим случаем и случаем присутствия третьего игрока наверняка, а именно, точки v_i являются теми же, в то время, когда цены b_i пропорциональны экзогенной вероятности входа. Смысл результата в том, что если вероятность входа нового участника уменьшается, конкуренция в первом раунде тоже уменьшается, так как у начальных игроков есть надежда на то, что новый игрок не примет участие во втором раунде и кто-то из них может получить предмет бесплатно. Поэтому цены b_i уменьшаются с увеличением вероятности того, что третий игрок не примет участие в торге(равной $(1-q)$). В частности при $q = 0$ равновесные предложения цены в точности равны нулю, если третьего игрока нет, каждый из игроков может получить один из предметов бесплатно.

6 Случай числа участников первого раунда >2 .

В этой главе мы рассмотрим случай, когда число участников первого раунда больше двух(при этом не будем принимать в рассмотрение экзогенные препятствия для входа новых участников). То есть, как и прежде, мы будем рассматривать модель, в которой аукцион состоит из двух частей, в каждой из которых к продаже предлагается некоторый объект, имеющий ценность для участников аукциона. В первом раунде принимают участие n игроков, $(n+1)$ый игрок может, заплатив некоторую сумму , принять участие во втором раунде. Опять же, ни один участник не хочет получить больше одного предмета, поэтому победитель первого раунда не принимает участие во втором. Оценки всех игроков представляют собой случайные величины,независимо и одинаково распределенные на отрезке $[0, 1]$. Каким может быть равновесие в такой новой игре ?

Для этого случая важно уточнить, что именно может наблюдать потенциальный игрок. В случае двух начальных игроков вся информация, необходимая для принятия решения об участии содержится в окончательной цене первого раунда. Эта информация дает новому игроку все, что ему надо знать об его будущем сопернике. Более того, аукцион с постепенным повышением цен изоморфен to the second price sealed bid auction(???). Здесь мы будем предполагать, что $(n+1)$ый игрок наблюдает первый раунд полностью, то есть он знает, кто отказался от торга и при какой цене.

В рассматриваемом нами случае большого количества начальных участников, стратегия торга состоит не только из цены, при которой тот или иной игрок прекращает торг(если никто еще не отказался от торга), но также и алгоритм, как реагировать на отказ от торга других участников (это то, что отличает аукцион с последовательным повышением цены от second price-аукциона, то есть от аукциона при котором назвавший наибольшую цену получает предмет торга и платит при этом максимальную цену, названную до него). Окончательная цена первого раунда не содержит всю необходимую информацию о стратегии участников первого раунда; она не содержит такие важные данные, как то, кто из игроков отказался от торга за предмет и при каких ценах. Поэтому мы предполагаем, что новым игроком наблюдается не только результат но и процесс аукциона в смысле, указанном выше.

A subgame perfect симетричное равновесие в анализируемых нами слабо недоминируемых стратегиях будет состоять из:

- Функции 'первого отказа' $d_1(v)$ отражающей цену при которой игрок с оценкой v откажется от участия, при условии, что ни один из оставшихся игроков до этого от участия не отказался;

- Функции 'второго отказа' $d_2(v, d_1)$ отражающей цену при которой игрок отказывается от торга, если до этого из торга при цене d_1 вышел один из участников.

...(и так далее)...

- Функции ‘последнего отказа’ $d_{n-1}(v, d_1, d_2, \ldots, d_{n-2})$ отражающей цену при которой игрок отказывается от торга в случае, когда у него остался только один конкурент;

- "Мнение"игрока $n+1$ об оценке его будущих соперников, представленное в виде функции от $v, d_1, \ldots, d_{n-1}$;

- Решение об участии игрока $n+1$ как функции от его "мнения".

Как и раньше, как только решение о входе принято и начинается второй раунд аукциона единственная слабо недоминируемая стратегия для игроков - прекращать участие при цене, равной их оценке предмета.

Lemma 3 *A subgame perfect symmetric равновесие в слабых недоминируемых стратегиях существует, причем*

- $d_1(v) = v$,

- $d_2(v, d_1) = v$ *и так далее до* $d_{n-2}(v, d_1, \ldots, d_{n-3}) = v$,

- $d_{n-1}(v, d_1, d_2, \ldots, d_{n-2})$ - *ступенчатая функция с некоторыми точками разрыва и разницами левых и правых пределов в этих точках разрыва - функциями от* d_{n-2}.

В лемме 3 неявно изложена идея того, что все игроки, кроме последних двух, заканчивают игру, когда цены достигают их оценок, два оставшихся игрока играют по стратегии аналогичной случаю двух участников.

Доказательство: Очевидно, что ни один из первых $n-2$ не может вести себя лучшим образом - никто из них не может получить ни один из двух предметов торга по цене ниже, чем их оценки этого предмета. Теперь предположим, что цена в первом раунде достигла уровня d_{n-2} и в игре остались только двое. Каждый из них считает, что его соперник следует изложенным выше стратегиям торга, каждый из них при этом, so she updates the distribution of his rival to uniform with support $[d_{n-2}, 1]$. С вероятностью d_{n-2} оценка игрока $n+1$ не превысит d_{n-2} и он не примет участия во втором раунде. С дополняющей вероятностью $1 - d_{n-2}$ его оценка будет по крайней мере d_{n-2}, в случае чего игра будет аналогична игре с двумя участниками, для которой мы доказали существование ступенчатого равновесия. Поэтому, игра эквивалентна игре с двумя участниками и экзогенными препятствиями входа, изложенными в предыдущей части работы, поэтому можно применить лемму 2. Это завершает доказательство.

7 Случай нескольких потенциальных участников.

Другое, вполне естественное расширение модели заключается в рассмотрении случая нескольких потенциальных участников. Как и раньше, будем рассматривать двух игроков первого раунда, но теперь кроме них в системе есть $N \geq 2$ новых участников с независимыми оценками(оценки новых игроков- случайные величины, независимые попарно, кроме того предполагается их независимость с оценками участников первого раунда). Мы хотим изучить, существуют ли ступенчатые равновесные функции торга для игроков.

Предположим, что по наблюдению результатов первого раунда новые участники приходят к выводу, что оценка оставшегося игрока находится между v_k и v_{k+1}. Мы найдем пороговое значение оценки входа $\bar{v}_k \geq v_{k+1}$, которое будет одинаковым для всех новых игроков. Рассмотрим случай, когда все потенциальные участники, кроме одного решают принять участие в аукционе; это происходит если их оценки выше, чем $F(\bar{v}_k)$. При этом ожидаемый выигрыш последнего из участников с оценкой $v \leq \bar{v}_k$ равен $F^{N-1}(\bar{v}_k)(v - E[u|v_k \leq u < v_{k+1}])$. Он найдет для себя выгодным принять участие в аукционе если его ожидаемый выигрыш больше(или по крайней мере равен)

c. Поэтому значение $\bar{v}_k$ определяется из уравнения:

$$F^{N-1}(\bar{v}_k)(\bar{v}_k - E[u|v_k \le u < v_{k+1}]) = c.$$

Аналогично, если проигравший игрок первого раунда deviates и торгуется до цены выше b_k но ниже b_{k+1} и, поэтому, по предположению, игроки второго раунда считают, что его оценка равна v_k, входной порог $\hat{v}_k$ определяется из уравнения

$$F^{N-1}(\hat{v}_k)(\hat{v}_k - v_k) = c.$$

Чтобы определить, существует ли равновесие, в котором функции торга являются ступенчатыми, аналогично части 4 необходимо вычислить производные по v_{k+1} от производных(???) $\pi_{b_k}(v)$ и $\pi_{<b_{k+1}}(v)$ при $v_{k+1} = v_k$. Легко проверить, что неравенство

$$\left.\frac{\partial \pi'_{b_k}(v)}{\partial v_{k+1}}\right|_{v_{k+1}=v_k} \ge \left.\frac{\partial \pi'_{<b_{k+1}}(v)}{\partial v_{k+1}}\right|_{v_{k+1}=v_k} \tag{4}$$

эквивалентно

$$\frac{h(v_k)}{h(\hat{v}_k)} \le \frac{NF^{N-1}(\hat{v}_k)}{1 + F(\hat{v}_k) + \cdots + F^{N-1}(\hat{v}_k)},$$

которое не выполняется, по крайней мере для малых c. Поэтому равновесие, которое было построено в части 4 не верно для случая большого количества новых участников.

Однако, существуют два способа, с помощью которых возможно построить равновесие, в котором функции торга являются ступенчатыми. Первый заключается в "отбрасывании мнений"об оценке игроков новыми игроками. Заметим, что пока мы предполагали что игрок первого раунда, торгующийся строго между b_k и b_{k+1} считается имеющим оценку v_k; при этом альтернативное предположение может состоять в том, что он имеет оценку, равную нулю. Легко увидеть, что такое альтернативное предположение сделает игрока первого раунда более расположенным к торгу(???), естественно, кроме случая, когда оценка такого игрока строго равна нулю. Может быть показано, что в этой ситуации при дополнительном условии на плотность распределения вероятности $f(0) = 0$ равновесие в классе ступенчатых функций существует, при этом предположение о монотонности hazard rate $h(x)$не является существенным.

Другой способ получить равновесие в ступенчатых функциях при тех же предположениях об мнениях игроков об оценках их конкурентов, что были нами применены в главе 4 - предположить случайное число потенциальных новых игроков, неизвестное никому из них(в том числе и игрокам первого раунда). Предположим, например,[7] что количество потенциальных новых игроков распределено по экспоненциальному закону с параметром p, из чего следует, что вероятность того, что в игре l потенциальных новых игроков равна $p_l = p(1-p)^l$. Обозначив за $\bar{v}_k'$ производную равновесного порогового значения

$$\left.\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial v_{k+1}}\right|_{v_{k+1}=v_k} = \frac{1}{2}\frac{p}{p - c(1-p)f(\hat{v}_k)},$$

можно записать неравенство (4) как:

$$\frac{f(v_k)}{2}\left(1 - \frac{p}{1-(1-p)F(\hat{v}_k)}\right) + \frac{p(1-p)f(\hat{v}_k)\bar{v}_k'}{[1-(1-p)F(\hat{v}_k)]^2}\left(1 - F(v_k)\right) \geq f(v_k)\left(1 - \frac{p}{1-(1-p)F(\hat{v}_k)}\right),$$

или, что эквивалентно, неравенству:

$$\frac{1}{2}h(v_k)[1-(1-p)F(\hat{v}_k)] \leq p\bar{v}_k' h(\hat{v}_k),$$

которое верно при достаточно больших p. Производя построения, аналогичные проделанным нами в главе 4, легко проверить, что для любого положительного c существует $p < 1$ такая, что существует равновесие в ступенчатых функциях в случае экспоненциального распределения числа потенциальных участников с параметром p.

Поэтому, равновесие в ступенчатых функциях может быть распространено и на случай нескольких потенциальных участников в двух случаях: когда $f(0) = 0$ и новые участники настроены оптимистично относительно оценки легко отказывающегося от торга игрока первого раунда и когда число участников представляет собой случайную величину с относительно малым математическим ожиданием.

[7] Экспоненциальное распределение выбрано для удобства, так как условная вероятность того, что число новых участников будет равно $i+1$, при условии, что есть по крайней мере один потенциальный участник(эту вероятность учитывает каждый потенциальный игрок) равна безусловной вероятности иметь i участников. Равновесие, при котором функции торга - ступенчатые может быть аналогичным образом построено для распределения Пуассона с достаточно большим параметром λ.

8 Заключение.

В этой статье были рассмотрены вопросы о том, как желание предоставить неверную информацию о своих оценках потенциальному игроку(и, таким образом, предотвратить его участие во втором раунде)воздействует на поведение игроков первого раунда в двухпериодных аукционах с последовательным поднятием цен участниками. Найденное нами равновесие, в котором равновесные функции торга - ступенчатые - показывает, что игроки первого раунда будут обеспокоены угрозой появления нового конкурента и будут проявлять тенденцию к скрыванию информации от нового игрока. Это ведет к неэффективности результата аукциона: предметы не всегда получают те участники, оценки этих предметов которыми - наибольшие. Источников неэффективности - 2, и оба вызваны тем, что в случае ступенчатых функций торга точные оценки игроков установить невозможно. Так, потенциальный игрок может отказаться от участия, хотя его оценка выше, чем у проигравшего игрока первого раунда. Или, оба игрока первого раунда могут отказаться от торга при одной и той же цене, при этом игрок с меньшей оценкой может получить объект(в этом случае, напомню, объект получает любой из игроков с вероятностью 0.5).

Эти выводы напоминают выводы работы Bhattacharyya [2]. Bhattacharyya изучал двухпериодный аукцион в котором участвуют двое, первый игрок назначает цену, а второй при этом решает участвовать или нет. Если он участвует, то начинается обычный аукцион, в котором игроки по-очереди назначают все большую цену, если же второй игрок отказывается от участия, первый получает предмет за назначенную им цену. Предположим, что второму игроку при этом все равно - участвовать или нет, для этого случая можно найти цену, которую должен предложить первый игрок(для равномерного распределения оценки эта цена равна половине стоимости предмета). Этот результат похож на полученный нами в том смысле, что первый игрок действует с расчетом на то, чтобы предотвратить вход второго. Однако постановка задачи существенно отличается от нашей, так как в аукционах с последовательным поднятием цены победитель платит цену при которой его конкурент отказывается от торга а не ту цену, которая соответствует его действительной оценке. Это дает возможность для блефа, и в рассмотренной нами задаче это действительно имеет место. В модели Bhattacharyya подобного блефа быть не может.

Получающееся семейство степенных функций напоминает частичное равновесие полученное в работах Crawford и Sobel [4]. В их статье рассматривается широкий класс игр, в которых участник, располагающий некоей информацией, посылает информационные сигналы другому участнику. Опираясь на эти сигналы возможно получить информацию о посылающем участнике. Ими было найдено, что при некоторых предположениях о структуре выигрыша, оптимальный сигнал для посылающего игрока состоит из некоторого подмножества типов этого игрока, к которым он принадлежит. Однако, они не рассматривают тот случай, что тип участника, принимающего сигналы может быть определен не однозначно, что мешает использованию их результатов по крайней мере в рамках private value auctions. В их модели равновесие также не является однозначно определенным, однако при этом появляется возможность упорядочить равновесия по coarseness of the signal. В нашей модели равновесия не могут быть упорядочены подобным образом, так как в нашей модели обычно существуют равновесия с различным числом ступеней, и к тому же существует некоторая свобода в выборе точек разрыва.

Многие вопросы о функционировании аукционов с несколькими раундами и с возможным изменением состава участников между раундами остаются нерешенными. В частности мы не знаем, является ли найденное нами равновесие единственным. Кроме этого, интересно проанализировать вопрос об оптимальной цене входа и о том, должен ли вход в более поздних раундах быть дешевле, чем вход в более ранних. Так и более общий вопрос, каковым должно быть устройство аукциона для достижения оптимальности в том или ином плане(в том числе какая информация о поведении других игроков должна быть доступна отдельно взятому игроку)остается нерешенным.

Список литературы

[1] Avery, C. (1998) “Strategic Jump Bidding in English Auctions", *Review of Economic Studies,* 65(2), 185-210.

[2] Bhattacharyya, S. (1990) “The Analytics of Takeover Bidding: Initial Bids and Their Premia", working Paper, Carnegie Mellon University.

[3] Cho, I.-K. and D.Kreps (1987) “Signaling Games and Stable Equilibria", *Quarterly Journal of Economics,* Vol. 102, pp. 179-221.

[4] Crawford, V. and J. Sobel (1982) “Strategic Information Transmission", *Econometrica,* 50(6), 1431-1451.

[5] Daniel, K. and D. Hirshleifer (1998) “A Theory of Costly Sequential Bidding", mimeo, Northwestern University.

[6] Fishman, M. (1988) “A Theory of Preemptive Takeover Bidding", *The Rand Journal of Economics,* 19(1), 88-101.

[7] Gal, S., M. Landsberger and A. Nemirovski (2003) “Participation in Auctions", mimeo, Haifa University.

[8] Hausch D. (1986): “Multi-Object Auctions: Sequential vs. Simultaneous Sales", *Management Science,* 12, 1599-1610.

[9] Landsberger, M and B. Tirelson (2003): “Games (Auctions) with Costly Actions (Bids) and Correlated Signals", mimeo, Haifa University.

[10] Milgrom, P. and R. Weber (1982): “A Theory of Auctions and Competitive Bidding, II", Northwestern University Manuscript.

[11] Ortega-Reichert, A. (1968): “Models for Competitive Bidding under Uncertainty", Ph.D. Dissertation (Technical Report No.8), Department of Operations Research, Stanford University.